Χαρακτηρισμοί συνέχειας συναρτήσεων με χρήση ανοικτών και κλειστών συνόλων

Υπενθύμιση

① Αν (X,ρ), (Y,d) δύο μ.χ και $f: X \to Y$

(i) Αν $x_0 \in X$ η f είναι συνεχής στο x_0 $\left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in X : \rho(x,x_0)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon\right)$

$$f(B_\rho(x_0,\delta)) \subseteq B_d(f(x_0),\varepsilon)$$

(ii) Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$

② (ΕΙΚΟΝΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΙΚΟΝΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ)

Αν $f: X \to Y$ μια συνάρτηση

Για $A \subseteq X$, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ για $B, \Gamma \subseteq X$

Για $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

Ιδιότητες:
- $f^{-1}(B \cup \Gamma) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(\Gamma)$
- $f^{-1}(B \cap \Gamma) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(\Gamma)$
- $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

Επίσης για $A_1, A_2 \subseteq X$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$

ενώ δεν ισχύει εν γένει ότι $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

[Σημείωση: Αν η f είναι 1-1 όμως ισχύει]

Επίσης $\forall A \subseteq X$: $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

$\forall B \subseteq Y$: $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Θεώρημα

Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ μια συνάρτηση.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα: (1) Η f είναι συνεχής

(2) Για κάθε $G \subseteq Y$ ανοικτό, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X

(3) Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X

(4) Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Απόδειξη

$(1) \Rightarrow (2)$

Έστω G ένα ανοιχτό υποσύνολο του Y

Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

Έστω $x_0 \in f^{-1}(G)$. Τότε $f(x_0) \in G$

Εφόσον το G είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y

υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_d(f(x_0), \varepsilon) \subseteq G$

Εφόσον η f είναι συνεχής (παντού άρα και) στο x_0

υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_d(f(x_0), \varepsilon)$

Άρα (α), (β) προκύπτει $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq G$ και άρα $\boxed{B_\rho(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(G)}$

Άρα το σύνολο $f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό

$(2) \Rightarrow (1)$

Έστω $x_0 \in X$. Θα δ.ο η f είναι συνεχής στο x_0

Έστω $\varepsilon > 0$. Η ανοιχτή μπάλα $B_d(f(x_0), \varepsilon)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y

άρα από υπόθεση, το $f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X

Εφόσον $x_0 \in f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_d(f(x_0), \varepsilon))$

Συνεπώς $f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_d(f(x_0), \varepsilon)$

Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0

Εφόσον αυτό αποδείξαμε για τυχαίο $x_0 \in X$ η f είναι συνεχής

$(2) \Rightarrow (3)$

Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό. Τότε $Y \setminus F$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y

άρα από υπόθεση το $f^{-1}(Y \setminus F)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X

δηλ. το $X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X

και άρα το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X

$(3) \Rightarrow (2)$

Έστω $G \subseteq Y$ ανοιχτό. Τότε το $Y \setminus G$ είναι ~~ανοιχτό~~ κλειστό άρα από υπόθεση

το $f^{-1}(Y \setminus G)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X

$\overset{\|}{X \setminus f^{-1}(G)}$ Άρα το $f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό στο X.

$(3) \Rightarrow (4)$

Έστω $A \subseteq X$. Το $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y

άρα από υπόθεση το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ είναι κλειστό υποσύνολο του X

Όμως $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$

Αφού $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ και το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ είναι κλειστό

προκύπτει ότι $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$

Συνεπώς $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

$(4) \Rightarrow (3)$

Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό (άρα $\overline{F} = F$)

Θ.δ.ο το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X

Εφαρμόζοντας την υπόθεση (3) για $A = f^{-1}(F)$

προκύπτει ότι $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))}$

Όμως $f^{-1}(f(F)) \subseteq F \Rightarrow f^{-1}(f(F)) \subseteq \overline{F} = F$

F: κλειστό

Έτσι έχουμε ότι $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq F$

άρα $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$

και άρα το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό

Παρατήρηση

Αν (X,ρ), (Y,d) μ.χ και $f: X \to Y$ συνεχής

Δεν ισχύει γενικά ότι αν $A \subseteq X$ ανοιχτό τότε $f(A)$ ανοιχτό

π.χ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$

(όπου στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική)

για $A = (-3,3)$ το A είναι ανοιχτό

$f(A) = [0,9)$ το οποίο δεν είναι ανοιχτό

Ορισμός

α) Αν (X,ρ), (Y,d) δύο μ.χ

Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται ομοιομορφισμός αν η f είναι 1-1, επί, συνεχής και η $f^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχής

β) Οι μετρικοί χώροι (X,ρ), (Y,d) λέγονται ομοιομορφικοί αν υπάρχει $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός.

Θα συμβολίζουμε $(X,\rho) \sim (Y,d)$

Παραδείγματα

α) $\mathbb{R} \sim (-1,1)$

διότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

είναι συνεχής, 1-1, επί και η $f^{-1}: (-1,1) \to \mathbb{R}$ είναι επίσης συνεχής

$$\left(f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|} \right)$$

β) $(0,1) \sim (0,2)$ $[f(x)=2x]$

γ) $[0,1] \sim [0,2]$ $[f(x)=2x]$

δ) Γενικότερα: αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$

$(\alpha,\beta) \sim (\gamma,\delta)$ και $[\alpha,\beta] \sim [\gamma,\delta]$

Ορισμός

Αν X είναι ένα σύνολο και ρ, d είναι δύο μετρικές στο X

Λέμε ότι οι ρ, d είναι ισοδύναμες αν ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα στο X

[δηλ. για κάθε $A \subseteq X$

το A είναι ρ-ανοικτό $\Leftrightarrow$ το A είναι d-ανοικτό]

Συμβολίζουμε $\rho \sim d$

Παρατήρηση

$\rho \sim d \Leftrightarrow$ Η ταυτοτική συνάρτηση $I : (X,\rho) \to (X,d)$ είναι ισομορφισμός

$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X, $\forall x \in X$

$x_n \xrightarrow{\rho} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$

Απόδειξη Άμεσο από τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με αντίστροφες εικόνες ανοικτών συνόλων και τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες

$\Longleftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : B_\rho(x,\delta_1) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$

$\exists \delta_2 > 0 : B_d(x,\delta_2) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$

Παρατήρηση

Αν $X \neq \emptyset$ και ρ, d δύο μετρικές στο X και $a, b > 0$ ώστε

$\rho(x,y) \leq a\, d(x,y)$, $\forall x,y \in X$

$d(x,y) \leq b\, \rho(x,y)$

τότε $\rho \sim d$ (το αντίστροφο δεν ισχύει)

Παρατήρηση

Έστω (X,ρ) τυχαίος μ.χ

τότε υπάρχει μια φραγμένη μετρική d στο X ($diam((X,d)) < +\infty$)

ώστε $\rho \sim d$

Απόδειξη

Αν $d(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, $\forall x,y \in X$

Έχουμε δείξει ότι η d είναι μετρική στο X

Έχουμε $d(x,y) \leq 1$, $\forall x,y \in X$ άρα d: φραγμένη

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \Leftrightarrow \rho(x_n,x) \to 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho(x_n,x)}{1+\rho(x_n,x)} \to 0$$

$$\Leftrightarrow d(x_n,x) \to 0 \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$$

Σημείωση

Μια άλλη επιλογή θα ήταν : $d(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$

Ορισμός

Μια ιδιοτητα (P) που αφορά μετρικούς χωρους ονομαζεται **τοπολογική ιδιοτητα** αν ισχυει το εξής:
Αν (X,ρ) ειναι μ.χ που εχει την (P) και d μια μετρική στον X ισοδυναμη της ρ τοτε ο (X,d) εχει την (P)

Παρατηρηση

Αν (X,ρ), (Y,σ) ειναι ομοιομορφικοί μ.χ και (P) μια τοπολογική ιδιοτητα. Αν ο (X,ρ) εχει την (P) τοτε την εχει και ο (Y,σ)

Αποδειξη

Εστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός

Οριζουμε μετρική d στον X με $d(x,y)=\sigma(f(x),f(y))$

Η d ειναι μετρική στο X, ισοδυναμη της ρ αρα ο (X,d) εχει την (P)

Ομως οι χωροι (X,d), (Y,σ) ειναι ισομετρικοί ($f: X\to Y$, $\sigma(f(x),f(y))=d(x,y)$)

αρα και ο (Y,σ) εχει την ιδιοτητα (P)

Παραδειγματα

α) Η ιδιοτητα να ειναι φραγμενος ενας μ.χ δεν ειναι τοπολογική

Πραγματι για καθε (μη φραγμενο) μ.χ (X,ρ) υπάρχει ισοδυναμη φραγμενη μετρική

β) Η ιδιοτητα να ειναι διαχωρισιμος ενας μ.χ ειναι τοπολογική

Πραγματι αν (X,ρ) διαχωρισιμος μ.χ και D αριθμησιμο και πυκνό υποσυνολο του (X,ρ) αν d μετρική στο X ισοδυναμη της ρ το D ειναι επισης πυκνο στο (X,d)